КОНЕЦКАЯ П.В., ЛУТКОВСКАЯ Е.А.

АППРОКСИМАЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Иркутский государственный университет», Россия

Звук – это воспринимаемое слухом колебательное движение воздуха или другой среды [1], причем колебание передается в пространстве посредством изменения давления воздуха (или иной среды) во времени. Человеческое ухо является приемником этих волн.

Описать процесс восприятия звука человеком можно следующим образом. Звуковые волны, попадая в наружный слуховой проход (см. рис. 1), направляются к барабанной перепонке и заставляют ее вибрировать. Три маленькие кости в среднем ухе механически связывают барабанную перепонку с улиткой. В улитке находятсятысячи мельчайших волосков. Волоски, которые находятся вблизи входа улитки, стимулируются высокими частотами, а те, что расположены вблизи вершины, стимулируются низкими частотами. Движения этих волосков активируют нервные клетки, которые посылают сигналы по различным нервным путям в мозг, где сигналы интерпретируются как звук [2].

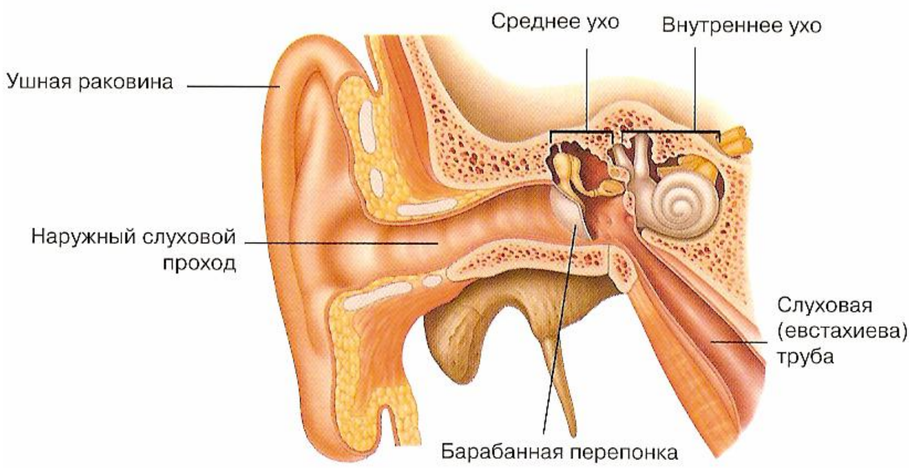


Рис. 5. Строение человеческого уха [3]

Звуковые волны могут быть описаны выражением:

$$q(t) = A_0 + A\sin(\omega t - \delta), \quad (1)$$

где $q(t)$ - атмосферное давление на барабанной перепонке, A_0 - нормальное атмосферное давление, A - максимальное отклонение давления от нормального атмосферного давления, ω - циклическая частота, δ - фазовый угол (начальная фаза колебаний).

Если говорить грубо, то ухо представляет собой систему, в которой звуковую волну можно разбить на сумму гармоник (синусоид с разными частотами, амплитудами и фазовыми углами):

$$\mathrm{q(t)} = A_0 + A_1 \sin(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \sin(\omega_2 t - \delta_2) + \ldots + A_n \sin(\omega_n t - \delta_n), \qquad (2)$$

и при этом (1) и (2) будут одинаково восприниматься человеком.

Рассмотрим теперь две волны: реальную периодическую звуковую волну $p(t)$с периодом T, которая при этом не является конечной суммой синусоидальных волн и аппроксимирующую звуковую волну $q(t)$, которая состоит из суммы синусоидальных гармоник. Как уже говорилось ранее, эти волны будут одинаково восприниматься человеком. Логично будет предположить, что волна $q(t)$имеет тот же период T, что и $p(t)$. Следовательно, каждый синусоидальный член в $q(t)$будет иметь период T и частоты синусоидальных составляющих должны быть целыми и кратными основной частоте $\frac{1}{T}$ функции $p(t)$. Таким образом,ω_k в уравнении (2) должно иметь вид

$$\omega_k = 2\pi k / T. \qquad (3)$$

Человеческое ухо, как реальная система, имеет несколько ограничений. Первое – ухо не воспринимает частоты выше 20 кГц, из чего следует, что количество гармониксчастотами (3) ограничивается числом 20000. Второе– существует пороговое значение интенсивности звука, которое может различить человек. Пороговое значение интенсивности пропорционально квадрату амплитуды звука. С точки зрения звуковых волн, $p(t)$и $q(t)$,это ограничение можно описать следующим образом:

$$\int_0^T e^2(t)dt = \int_0^T [p(t) - q(t)]^2 dt, \qquad (4)$$

где$e(t)$ – это ошибка в приближении $q(t)$к $p(t)$, которую ухо не может воспринять. Выражение (4) основано на методе наименьших квадратов.

Согласно [2, 4], если функция звуковой волны $p(t)$, слышимая человеческим ухом,непрерывна на [0, T], то тригонометрическая функция $q(t)$вида

$$q(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{20000} a_n \cos\omega nt + \sum_{n=1}^{20000} b_n \sin\omega nt \qquad (5)$$

минимизирует среднеквадратичную ошибку (4) только при условии, что весовые коэффициенты являются коэффициентами Фурье:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\cos(\omega_k t)dt, \qquad (6)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\cos(\omega_k t)dt, \qquad (7)$$

где $k = 1 \div 20000$.

Рассмотрим пример аппроксимации звуковой волны методом наименьших квадратов. Найдем аппроксимацию функции $p(t) = (t - \pi)^2$ (см. Рис. 2)на интервале [0, 2π]полиномом третьего порядка.

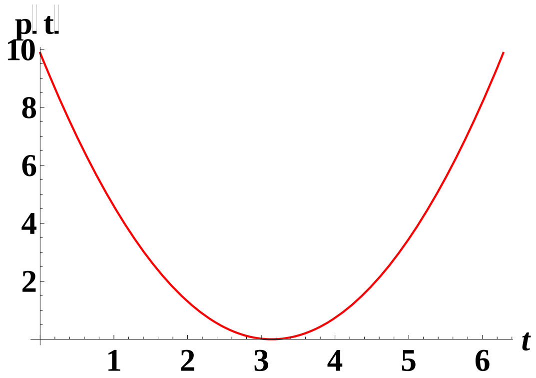


Рис. 6 - Функция $p(t) = (t-\pi)^2$

Из (6) и (7) получимкоэффициенты для функции, которая минимизирует среднеквадратичную ошибку: $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$, $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{4}{9}$. Таким образом, сама функция будет иметь вид:

$$q_3(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\cos t + \cos 2t + \frac{4}{9}\cos 3t. \tag{8}$$

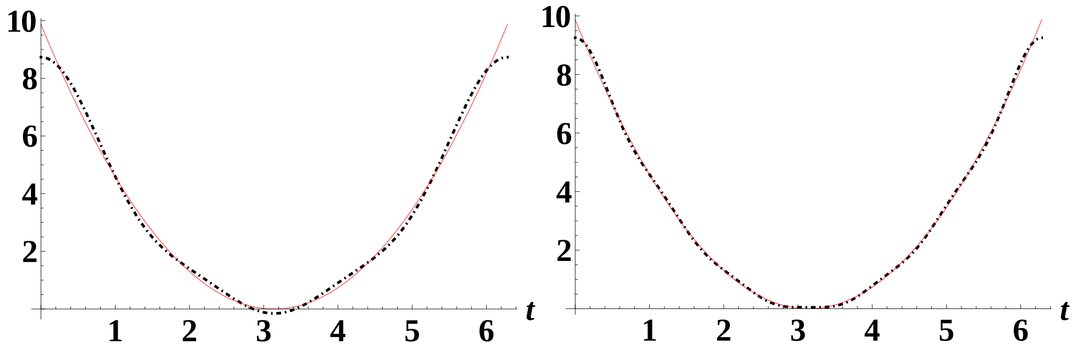
Если же искать приближенную функцию с точностью до 6-ти гармоник, то получим функцию вида

$$q_5(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\cos t + \cos 2t + \frac{4}{9}\cos 3t + \frac{1}{4}\cos 4t + \frac{4}{25}\cos 5t + \frac{1}{9}\cos 6t.$$

(9)

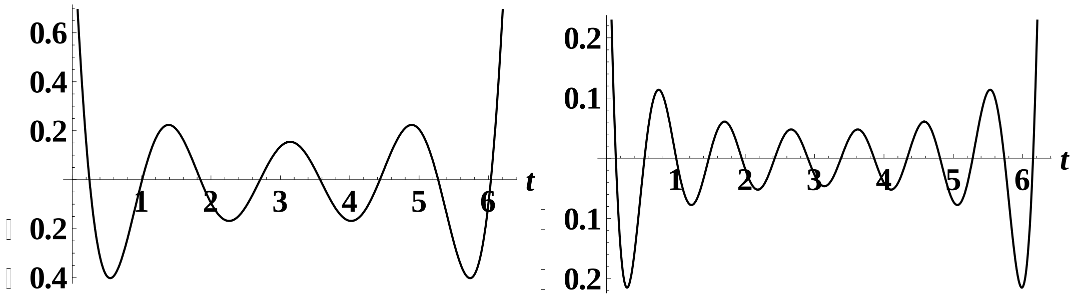
Было проведено моделирование этих двух аппроксимирующих функций (см. рис. 3). Также сравнивались ошибки аппроксимации функции полиномами $q_3(t)$ и $q_6(t)$: $e_3(t) = p(t) - q_3(t)$ и $e_6(t) = p(t) - q_6(t)$ (см. рис. 4). Видно, что с ростом количества гармоник у аппроксимирующей функции, ошибка становится меньше. Анализируя рисунки (3) и (4), можно отметить, что метод наименьших квадратов позволяет с довольно большой точностью найти приближение данной исходной функции. Так, среднеквадратичное отклонение ошибки $e_3(t)$ составляет, в среднем, 0.2 , или $\pm 2\%$ от пикового значения амплитуды колебаний исходной звуковой волны, а $e_6(t)$ составляет, в среднем, 0.1, или 1%. При этом видно, что на границах промежутка аппроксимации ошибка по-прежнему остается достаточно большой.

Следует понимать, что предположение о периодичности звукового сигнала на текущем временном интервале является идеализацией. Однако, обработка звука (в том числе и оцифровка аналогового сигнала) базируется на разложении в ряд Фурье [5], которое, в свою очередь, сходится к оригинальному сигналу в смысле среднего квадратичного [2, 4]. Также метод наименьших квадратов применяется для восстановления аналогового сигнала по цифровому (обратное разложение в ряд Фурье).



(а) (б)

Рис. 7 - Функция $q_3(t)$ (а) и $q_6(t)$ (б), совмещенные с исходной функцией p(t)



(а) (б)

Рис. 8 - Ошибки аппроксимации исходной функции p(t) полиномами 3-порядка и 6-порядка: $e_3(t)$ (а) и $e_6(t)$ (б)

Аппроксимация методом наименьших квадратов также используется в ситуациях, когда нет априорного обоснования для ее использования, например, для аппроксимации бизнес-циклов, кривых роста населения, кривых продаж и т.д. Она используется в этих случаях из-за его математической простоты. В общем случае, если нет другого критерия ошибки, критерий наименьших квадратов является одним из наиболее часто выбираемых [2].

Список использованной литературы

1. Звук // Словари – Словопедия : сайт. [Электронный ресурс]: – URL: http://www.slovopedia.com/24/199/1648163.html (дата обращения: 29.03.2017).

2. Howard A. Elementary Linear Algebra : Applications Version. 11th edition / A. Howard, C. Rorres. – Wiley, 2014. – 802 p.

3. Сидоренко М.Ю. Исследование влияния наушников на слух / М.Ю. Сидоренко, В.А. Федина // XIX муниципальная научно-практическая конференцияобучающихся «Культура. Интеллект. Наука»// Главная страница : сайт. [Электронный ресурс]: – URL: http://shikardos.ru/text/issledovanie-vliyaniya-naushnikov-na-sluh/ (дата обращения: 29.03.2017).

4. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука,1986. – 544 с.

5. Преобразование Фурье в действии: точное определение частоты сигнала и выделение нот / @Makeman //Интересные публикации / Хабрахабр: сайт. [Электронный ресурс]: – URL: https://habrahabr.ru/post/247385/ (дата обращения: 29.03.2017).